Perché leggere i classici

(delle dimostrazioni matematiche)

Cosimo Perini Brogi
Contatti*

Fra i matematici circola la storia su di un libro. Anzi: sul Libro. Questo testo raccoglierebbe esemplari molto particolari di oggetti che ogni matematico manipola, studia, reinventa quotidianamente.

È stato Paul Erdős a suggerire l'esistenza di una tale collezione: tutte le "migliori" dimostrazioni vengono scritte da una divinità matematica sul Libro, e il matematico umano non farebbe altro che afferrarne (talvolta!) una, e riportarla su carta per comunicarla poi al resto dell'umanità.

Ma cosa permetterebbe ad una dimostrazione di essere classificata fra gli esemplari del Libro? Per moltissimi, un fattore determinante nella valutazione di una prova matematica è la sua bellezza.

Anche secondo lo scrittore David Foster Wallace[1] «la matematica è forse l'ultimo dei gusti acquisiti», facendo riferimento ad un terreno di coltura comune per l'arte, la letteratura, la musica, e la nostra scienza formale preferita. Questa capacità estetica sarebbe una delle cifre essenziali per rendere una dimostrazione un "classico" della materia.

Esistono però anche dei casi che stimolano poco il gusto artistico del matematico. Soltanto a titolo di esempio, mi piace sottolineare che nessuno fra i miei colleghi ritiene che il teorema di Gentzen di eliminazione delle cesure abbia una dimostrazione esteticamente gradevole; eppure tutti concordano che teorema e sua dimostrazione siano fra i più importanti risultati ottenuti in logica e nello studio dei fondamenti della matematica.

Vorrei convincervi insomma che le dimostrazioni possono trasmetterci molto più che uno stimolo estetico: molto spesso, analizzando le prove di uno stesso teorema, possiamo divertirci a costruire classifiche diverse sulla base di differenti fattori, non necessariamente legati al "gusto" matematico, personale o, più correttamente, acquisito durante gli anni di studio.
Questo vale anche (o forse, soprattutto) per quei teoremi che conosciamo da giovanissimi, e le cui dimostrazioni, sebbene siano la maggior parte delle volte icastiche, diamo molto spesso per scontate, quando

[1] David Foster Wallace, *Rethoric and the Math Melodrama*, in Science Vol. 290, Issue 5500, pp. 2263-2267, 2000.

invece hanno tantissimo da dirci. Per i più noti “classici”, insomma, dell’arte del dimostrare.

Prendete, per esempio, la dimostrazione che $\sqrt{2}$ non è razionale attribuita convenzionalmente al pitagorico Ippaso.
Qualora voleste rinfrescarvi la memoria, la famiglia Hamkins ha preparato, assieme alla musicista Hannah Hoffman, un simpatico video a proposito.

Oltre alla triste fine del dimostratore, la canzoncina ci racconta molto bene la prova di Ippaso.
La dimostrazione è semplice, costruttiva, antica, e ha avuto una buona presa sui matematici del passato, tanto da essere ricordata sia da Aristotele, negli Analitici Primi I-23, sia da Euclide, nel decimo libro degli Elementi.

La prova ci permette però di ricavare anche molte informazioni *matematiche* in più. Intanto, abbiamo il seguente

Lemma 1. *Se* p, q *sono numeri naturali,* $q \neq 0$, *e* $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$, *allora* p *e* q *sono entrambi pari.*

Dimostrazione. Basta seguire l’argomento di Ippaso: se $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$ con $p, q \in \mathbb{N}$ e $q \neq 0$, allora

$$p^2 = 2q^2,$$

pertanto p è un numero pari.
Ciò significa che esiste un naturale k tale che $p = 2k$. Pertanto $p^2 = 4k^2$.
Questo implica però anche che

$$q^2 = 2k^2,$$

e quindi anche q deve essere pari, come volevasi dimostrare. □

L’irrazionalità di $\sqrt{2}$ diviene allora un immediato corollario al Lemma 1:

Corollario 2. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Dimostrazione. Se $\sqrt{2}$ fosse razionale, potrebbe essere espresso mediante una frazione $\frac{p}{q}$ dove p, q sono numeri naturali primi fra loro. Ma questo non è possibile, per via del Lemma 1. Pertanto $\sqrt{2}$ non è razionale. □

Possiamo in realtà fare molto di più, studiando meglio questa stessa dimostrazione “classica”.
Notiamo infatti che $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$ equivale logicamente all’enunciato

$$\forall \delta > 0, \left(|\frac{p}{q} - \sqrt{2}| \leq \delta. \right)$$

per $\delta \in \mathbb{R}$.
Dal Lemma 1 sappiamo che, per ogni p, q, $\frac{p}{q} \neq \sqrt{2}$. Dati i due numeri naturali, allora, possiamo calcolare esplicitamente il relativo δ?
Per cominciare, è facilissimo dimostrare il seguente

Lemma 3. *Per ogni* $x, y, \delta \in \mathbb{R}$*, se* $x, y > 0$ *e* $|x^2 - y^2| \geq \delta$*, allora* $|x - y| \geq \frac{\delta}{x+y}$.

Si vede adesso che il classico di Ippaso ci permette subito di enunciare una versione “quantitativa” del teorema dimostrato in musica dagli Hamkins:

Teorema 4. *Dati* $p, q \in \mathbb{N}$*, con* $q \neq 0$*. Se* p *e* q *non sono entrambi pari, allora*

$$|\frac{p}{q} - \sqrt{2}| > \frac{1}{pq + 2q^2}.$$

Dimostrazione. Siano $p, q \in \mathbb{N}$ con $q \geq 1$, e suppongo che p, q non siano entrambi pari.

Allora, per il Lemma 1, $p^2 \neq 2q^2$; pertanto $|p^2 - 2q^2| \geq 1$, da cui

$$|\left(\frac{p}{q}\right)^2 - (\sqrt{2})^2| \geq \frac{1}{q^2}.$$

Dal Lemma 3 ottengo subito

$$|\frac{p}{q} - \sqrt{2}| \geq \frac{\frac{1}{q^2}}{\frac{p}{q} + \sqrt{2}} = \frac{1}{q\left(p + q\sqrt{2}\right)} > \frac{1}{pq + 2q^2}.$$

□

Ecco quindi che la dimostrazione di Ippaso ci fornisce ben più di una certezza che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, permettendoci piuttosto di definire esplicitamente una funzione minorante della distanza fra $\sqrt{2}$ e qualsiasi altro razionale.

Questo è soltanto un semplicissimo esempio di *proof mining*.

L’origine della disciplina risale agli interessi di Georg Kreisel e Dana Scott, ma oggi il settore viene sviluppato da diversi matematici lungo varie direzioni in analisi funzionale, costruttivizzazione dell’algebra, ed estrazione di programmi.

La filosofia che sta dietro a questo settore di ricerca si può riassumere così: studiare a fondo la dimostrazione di un teorema per migliorarlo, ed estrarre dalla prova informazioni matematicamente rilevanti, raffinando l’analisi fino magari a produrre le linee di un programma che ci dia un effettivo e concreto “valore” computazionale del teorema.

La proof mining si occupa ormai di vari settori della matematica, dalla teoria dei numeri all’ottimizzazione, ed ha legami stretti con la parte più “informatica” della logica e dei fondamenti della matematica in generale, oltre ad essere, secondo l’opinione di chi scrive, un ottimo strumento educativo per chiunque desideri saggiare il proprio rigore analitico, indipendentemente dalla propria formazione matematica e dalle proprie inclinazioni personali.

Ovviamente, le parti più avanzate della disciplina richiedono un bagaglio tecnico ben più sviluppato di quanto usato per l’esempio proposto con prova di Ippaso. Ciononostante, questa stessa dimostrazione che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ha molto altro da raccontare, dato che ha avuto un ruolo non indifferente anche nello sviluppo di una nuova tecnica di dimostrazione formale.

Un modo per raggiungere l'assurdo a conclusione dell'argomento di Ipasso, infatti, consiste nel fare appello al principio della discesa infinita per i numeri naturali, formalizzato per la prima volta da Pierre de Fermat in riferimento proprio alla dimostrazione di Ipasso: se in una dimostrazione riusciamo a costruire una catena strettamente decrescente di numeri naturali, possiamo scartare tale argomento dimostrativo, dal momento che la relazione $\leq$ è ben-fondata su $\mathbb{N}$.

Nella moderna teoria strutturale della dimostrazione, l'argomento per discesa infinita ha permesso lo sviluppo dei sistemi di dimostrazioni *ciclici*, dove le prove informali, cui è abituato il matematico ordinario, possono essere "meccanizzate" attraverso alberi di dimostrazione non ben-fondati, con dei cicli che collegano specifici nodi secondo criteri di validità ben definiti sulla base della teoria matematica in questione.

Tali tecniche vengono oggi utilizzate per sviluppare un kernel di dimostratori automatici per vari sistemi formali che coinvolgono principi di induzione (ad esempio, sui naturali, come nell'aritmetica di Peano), operatori di punto-fisso (come il μ-calcolo), e particolari condizioni di chiusura semantiche (come per la logica proposizionale dinamica, che permette di studiare in maniera astratta il comportamento dei programmi informatici).

Quindi: perché leggere i "classici" della dimostrazione? Se la bellezza rimane un criterio altamente rilevante per la valutazione di una prova matematica, ci si può sbizzarrire in molti modi nello studiare le dimostrazioni anche in un ottica rigorosa e non puramente estetica; basta armarsi degli strumenti opportuni (e di un po' di spirito super-analitico).