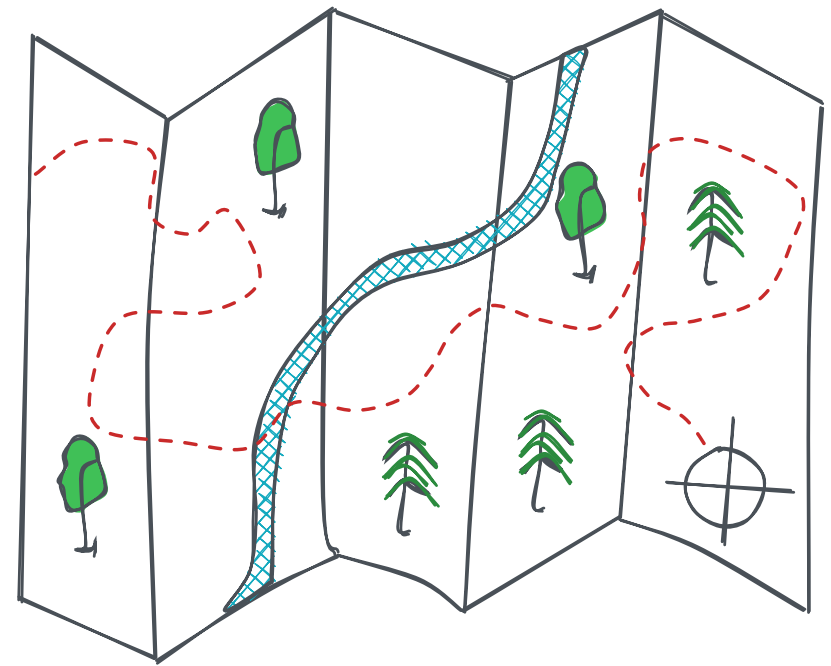


Piccolo Atlante delle Logiche Non-Classiche



- o Introduzione
- o Logica classica
- o Logica modale
- o Condizionali & Controfattuali
- o Logica temporale
- o Logiche & Paradossi
- o Per approfondire

Itinerario di oggi



La logica

*54.42. $\vdash :: \alpha \in 2. \supset :: \beta \subset \alpha. !\beta. \beta \neq \alpha. \equiv. \beta \in l''\alpha$

Dem.

$\neg. *54.4. \supset \vdash :: \alpha = l'x \cup l'y. \supset ::$

$\beta \subset \alpha. \exists !\beta. \equiv : \beta = \wedge. v. \beta = l'x. v. \beta = l'y.$

[*24.53.56.*51.161] $\equiv : \beta = l'x. v. \beta = l'y. v. \beta = \alpha \quad (1)$

$\vdash. *54.25. \text{Transp.} *52.22. \supset \vdash : x \neq y. \supset. l'x \cup l'y$

[*13.12] $\supset \vdash : \alpha = l'x \cup l'y. x \neq y. \supset. \alpha \neq l'x. \alpha \neq l'y \quad (2)$

$\vdash. (1). (2). \supset \vdash :: \alpha = l'x \cup l'y. x \neq y. \supset ::$

$\beta \subset \alpha. \exists !\beta. \beta \neq \alpha. \equiv : \beta = l'x. v. \beta = l'y.$

[*51.235]

$\equiv : (\exists z). z \in \alpha. \beta = l'z.$

[*37.6]

$\equiv : \beta \in l''\alpha \quad (3)$

$\vdash. (3). *11.11.35. *54.101. \supset \vdash. \text{Prop.}$

*54.43. $\vdash :: \alpha, \beta \in 1. \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda. \equiv. \alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$\vdash. *54.26. \supset \vdash :: \alpha = l'x. \beta = l'y. \supset : \alpha \cup \beta \in 2. \equiv x \neq y.$

[*51.231]

$\equiv. l'x \cap l'y = \Lambda.$

[*13.12]

$\equiv. \alpha \cap \beta = \Lambda \quad (1)$

$\vdash. (1). *11.11.35. \supset$

$\vdash :: (\exists x, y). \alpha = l'x. \beta = l'y. \supset : \alpha \cup \beta \in 2.$

$\equiv. \alpha \cap \beta = \Lambda \quad (2)$

$\vdash. (2). *11.54. *52.1. \supset \vdash. \text{Prop.}$

Che cos'è la logica?



Arthur Rackham, Wikimedia, Pubblico dominio

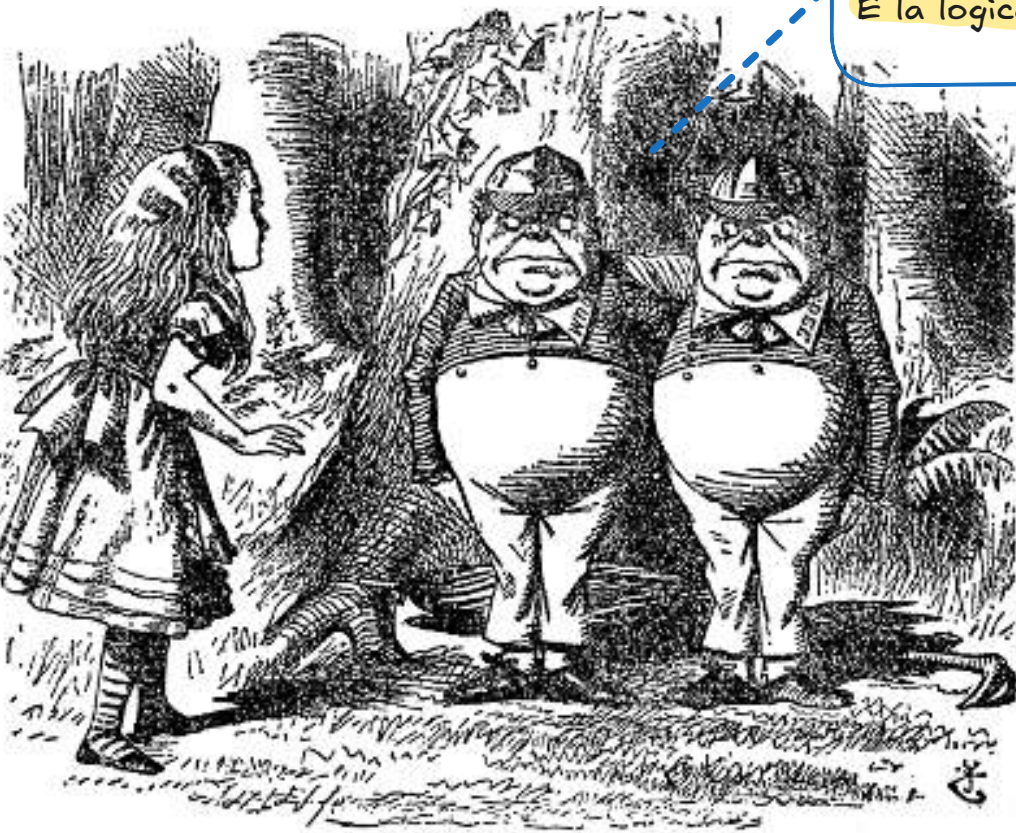
- Matematica
- **Filosofia**
- Informatica
- Linguistica
- Psicologia
- ...

Che cos'è la logica!?

«[...] Se fosse così, lo sarebbe;
e se era così, lo potrebbe essere;
ma dato che non è così, allora non lo è.

È la logica!»

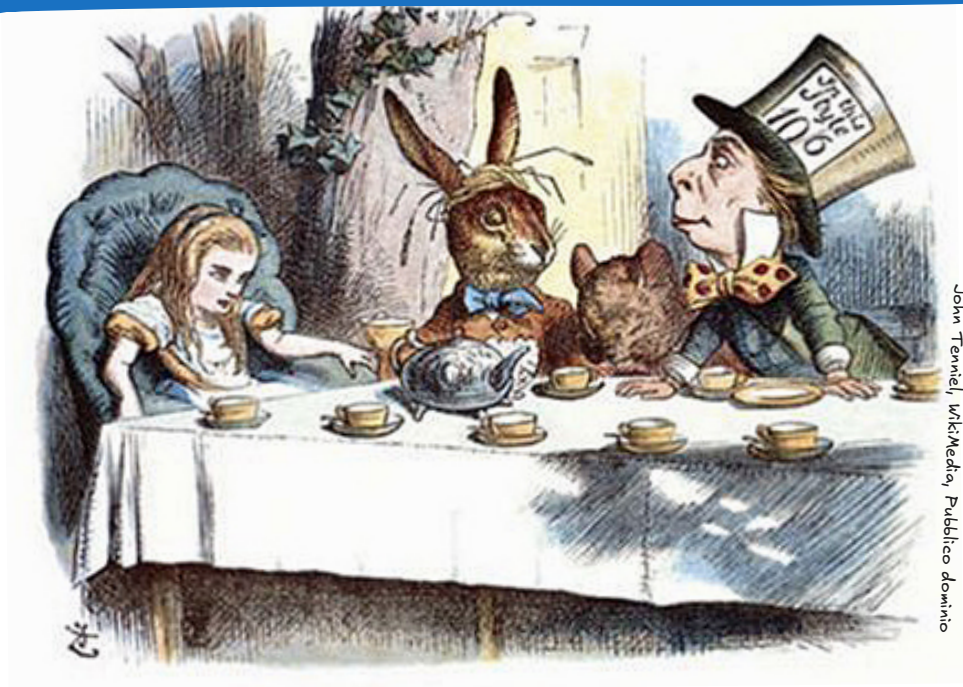
Traduzione di Mili Graffi



Una definizione (ed un esempio)

La logica studia quali ragioni
valgano davvero per un qualcosa,
e per quale motivo





John Tenniel | WikiMedia, Pubblico dominio

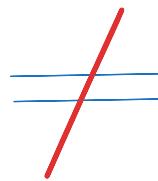
«[...] Quando parli, dovresti dire ciò che intendi dire» soggiunse il Leprotto Marzolino.

«Certo» replicò prontamente Alice; «perlomeno – perlomeno io intendo dire proprio ciò che dico – che è poi la stessa cosa, no?»

«No che non è la stessa cosa!» esclamò il Cappellaio. «A questa stregua, potresti sostenere che "Vedo ciò che mangio" sia la stessa cosa di "Mangio ciò che vedo"!»

Inferenze (il)logiche

- 1. Se mangio qualcosa, allora l'ho vista
 - 2. Mangio la focaccia
- Quindi: Ho visto la focaccia



- 1. Se mangio qualcosa, allora l'ho vista
 - 2. Ho visto la focaccia
- Quindi: Mangio la focaccia

Inferenze logiche

Modus ponens

1. Se mangio qualcosa, allora l'ho vista
 2. Mangio la focaccia
- Quindi: Ho visto la focaccia

1. Se ho visto qualcosa, allora la mangio
 2. Ho visto la focaccia
- Quindi: Mangio la focaccia

1. Se qualcosa è un fermione, allora ha spin semintero
 2. Un quark è un fermione
- Quindi: Un quark ha spin semintero

Uno splendido Modus Ponens

Uno splendido Modus Ponens

E poi se la gente sa – e la gente lo sa – che sai suonare,
Suonare ti tocca per tutta la vita, e ti piace lasciarti ascoltare

Fabrizio De André, Il suonatore Jones, 1971

1. Se la gente sa che sai suonare, allora suonare ti tocca...
 2. La gente sa che sai suonare
- Quindi: Suonare ti tocca...

2. La gente sa che sai suonare
 Quindi: Suonare ti tocca...

Una disciplina formale

Motivi per la conclusione

Se^A la gente sa che sai suonare, allora^B suonare ti tocca...
 La gente sa che sai suonare^A
 Suonare ti tocca...^B

} Premessa 1
 } Premessa 2
 } Conclusione

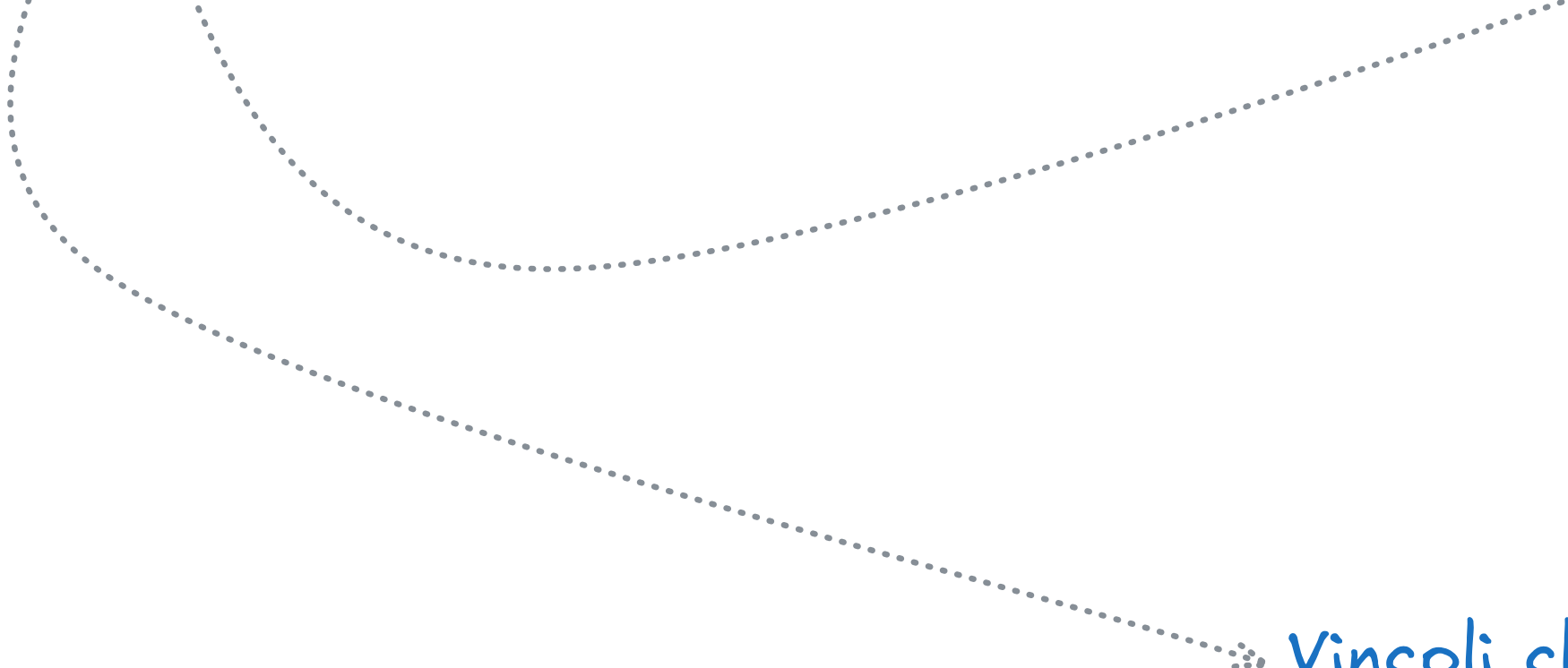
Ragioni della conclusione

Premesse $\models$ Conclusione

Premesse $\models$ Conclusione

Non importa che le premesse siano vere o false!

Ma non è possibile che le premesse siano vere e la conclusione falsa!!



Vincoli classici

- **Bivalenza:** Ogni enunciato **o** è vero, **oppure** è falso
(non ci sono altri valori!)
- **Non-contraddizione:** Nessun enunciato è vero **e** falso
- **Verofunzionalità:** La verità/falsità di ogni enunciato dipende solo dalla verità/falsità delle sue **componenti**

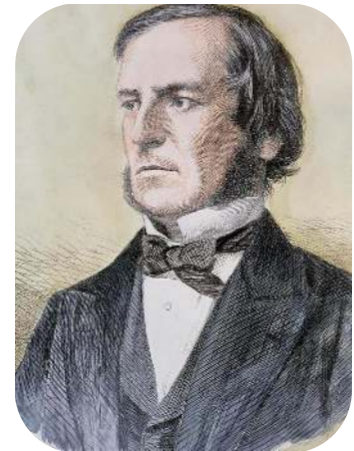
Ogni enunciato **o** è vero, **oppure** è falso
(non ci sono altri valori!)

addizione: Nessun enunciato è vero **e** falso

alità: La verità/falsità di ogni enunciato dipende solo dalla verità/falsità delle sue **componenti**

Porte logiche

- La **negazione** ($\sim A$) di un enunciato A è falsa quando A è vero (e viceversa!)
- La **disgiunzione** ($A \vee B$) di due enunciati A, B è vera quando almeno uno degli enunciati A, B è vero
- La **coniunzione** ($A \wedge B$) di due enunciati A, B è vera quando entrambi gli enunciati A, B sono veri
- L'**implicazione** ($A \rightarrow B$) di due enunciati A, B è vera quando **non è possibile** che A sia vero e B sia falso



Vincoli classici

- **Bivalenza:** Ogni enunciato $\circ$ è vero, oppure è falso (non ci sono altri valori!)
- **Non-contraddizione:** Nessun enunciato è vero e falso
- **Verofunzionalità:** La verità/falsità di ogni enunciato dipende solo dalla verità/falsità delle sue componenti

Porte logiche

- La negazione ($\sim A$) di un enunciato A è falsa quando A è vero (e viceversa!)
- La disgiunzione ($A \vee B$) di due enunciati A, B è vera quando almeno uno degli enunciati A, B è vero
- La congiunzione ($A \wedge B$) di due enunciati A, B è vera quando entrambi gli enunciati A, B sono veri
- L'implicazione ($A \rightarrow B$) di due enunciati A, B è vera quando non è possibile che A sia vero e B sia falso



A	$\sim A$
1	0
0	1

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

A	B	$A \rightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

???

A	B	$\sim A$	$A \& \sim A$	$(A \& \sim A) \rightarrow B$
1	1	0	0	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

I vincoli classici ci impongono quindi che

$$A, \sim A \models B$$

indipendentemente dal contenuto di A, B !

Ci sono $mo(n)$ di e $mo(n)$ di!

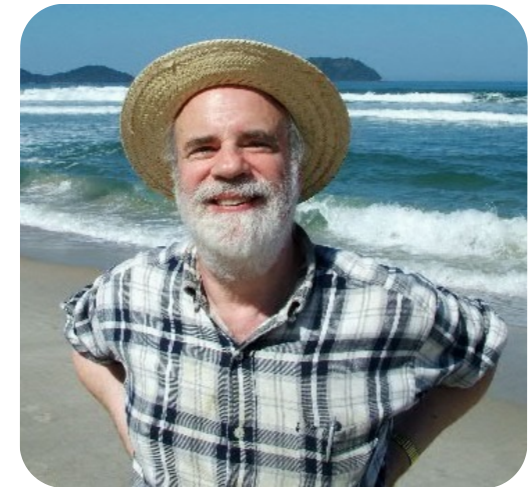


WikiMedia, Pubblico dominio

Violando il principio di verofunzionalità, possiamo associare ad ogni situazione s un insieme di alternative, cioè: situazioni che sono possibili rispetto ad s

Se oggi sono a Genova,

- è possibile che domani sia a Barcellona
- non è possibile che domani sia su Alpha-Centauri

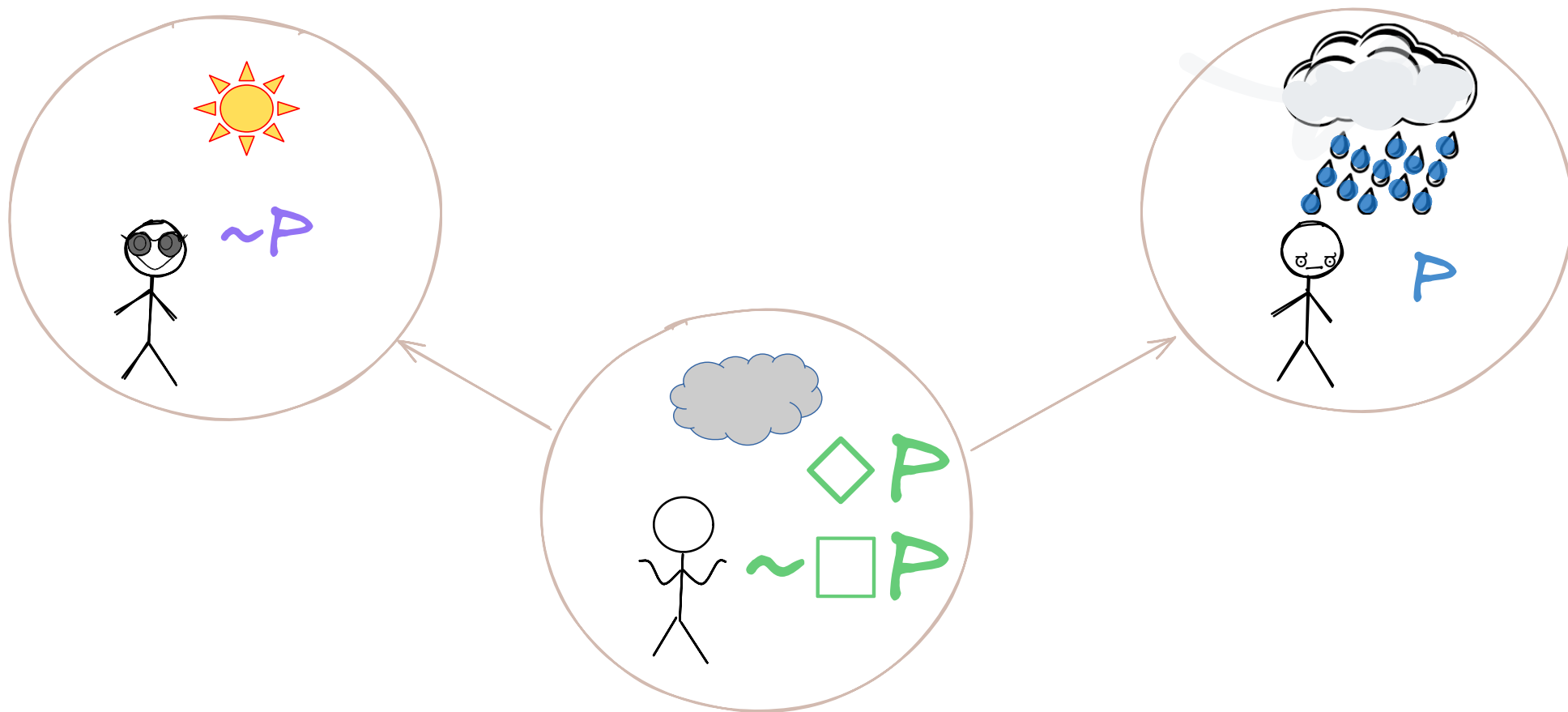


WikiMedia, Pubblico dominio

La logica modale

«È possibile che piova» è un enunciato vero in una data situazione se l'enunciato «Piove» è vero in almeno una delle alternative alla data situazione

«È necessario che piova» è un enunciato vero in una data situazione se l'enunciato «Piove» è vero in tutte le alternative alla data situazione



Logiche modali



Kripke, Saul 1965



Feys, Robert 1928



Boolos, George 1983



Gärdenfors, Peter 1982

Ci sono $\text{mo}(n)$ di e $\text{mo}(n)$ di!

Violando il principio di verifunzionalità, possiamo associare ad ogni situazione s un insieme di alternative, cioè:

situazioni che sono possibili rispetto ad s



Gärdenfors, Peter 1982

Se oggi sono a Genova,

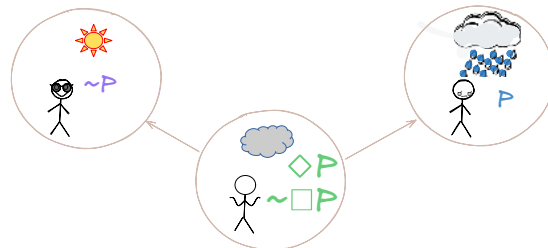
- è possibile che domani sia a Barcellona

- non è possibile che domani sia su Alpha-Centauri

La logica modale

«È possibile che piova» è un enunciato vero in una data situazione se l'enunciato «Piove» è vero in almeno una delle alternative alla data situazione

«È necessario che piova» è un enunciato vero in una data situazione se l'enunciato «Piove» è vero in tutte le alternative alla data situazione



A	B	$\sim A$	$A \wedge \sim A$	$(A \wedge \sim A) \rightarrow B$
1	1	0	0	1

I vincoli classici ci impongono quindi che

- Informatica
- Filosofia
- Informatica
- Linguistica
- Psicologia
- ...

Logiche dinamiche, epistemiche, deontiche

Che cos'è la logica?

Se fosse così, lo sarebbe;
era così, lo potrebbe essere;
tutto che non è così, allora non lo è.
logica?

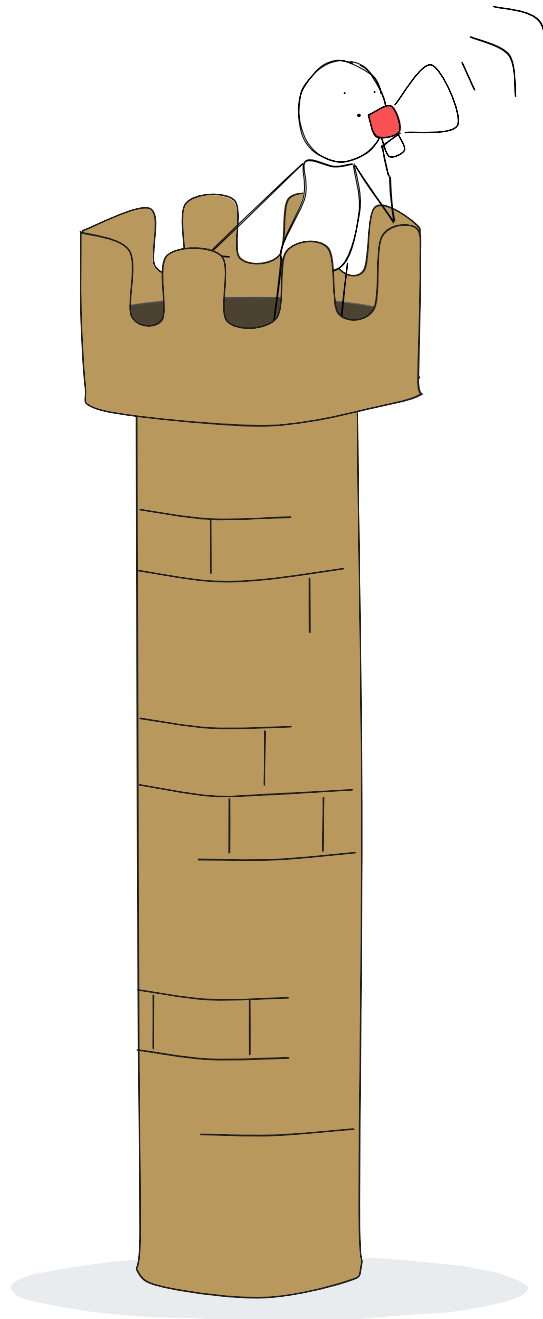
na definizione (ed un esempio)

ni
lcosa

Inferenze (il)logiche

1. Se mangio qualcosa, allora l'ho vista
 2. Ho visto la focaccia
- Quindi: Mangio la focaccia

Inferenze logiche
Modus ponens



Implicazione modale

$$\begin{aligned} A \rightarrow B &:= \sim \Diamond(A \ \& \ \sim B) \\ &:= \Box \sim(A \ \& \ \sim B) \end{aligned}$$

??

Implicazione modale

$$\begin{aligned} \rightarrow B &:= \sim \Diamond(A \ \& \ \sim B) \\ &:= \Box \sim(A \ \& \ \sim B) \end{aligned}$$



??



WikiMedia, Pubblico dominio

Inferenza monotona

$$A \rightarrow B \models A \ \& \ C \rightarrow B$$

$$\begin{aligned} > B &:= \sim \Diamond(A \& \sim B) \\ &:= \Box \sim(A \& \sim B) \end{aligned}$$



WikiMedia, Pubblico dominio

??



Inferenza monotona

$$A \rightarrow B \models A \& C \rightarrow B$$

«Se la particella ha spin semintero, allora è un fermione» $:= \sim \Diamond(\text{Spin_semint} \& \sim \text{Ferm})$

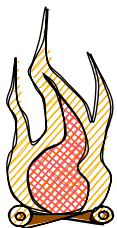
«Se la particella ha spin semintero e non ha massa, allora è un fermione» $:= \sim \Diamond(\text{Spin_semint} \& \text{No_mas} \& \sim \text{Ferm})$

$$A \rightarrow B \not\models A \& C \rightarrow B$$

Inferenza non-monotona!

I poeti

«S'i' fosse foco, arderei 'l mondo;
s'i' fosse vento, lo tempesterei;
s'i' fosse acqua, i' l'anegherei;
s'i' fosse Dio, manderei' en profondo»



Fabrizio De André, Se fossi foco, 1968
(da un sonetto di Cecco Angiolieri, 1260-1312)

«Se fossi più gatto,
se fossi un po' più vagabondo,
vedrei in questo sole,
vedrei dentro l'alba e nel mondo...»



Francesco Guccini, Via Paolo Fabbri 43, 1976

Implicazione controfatt

Implicazione controfattuale



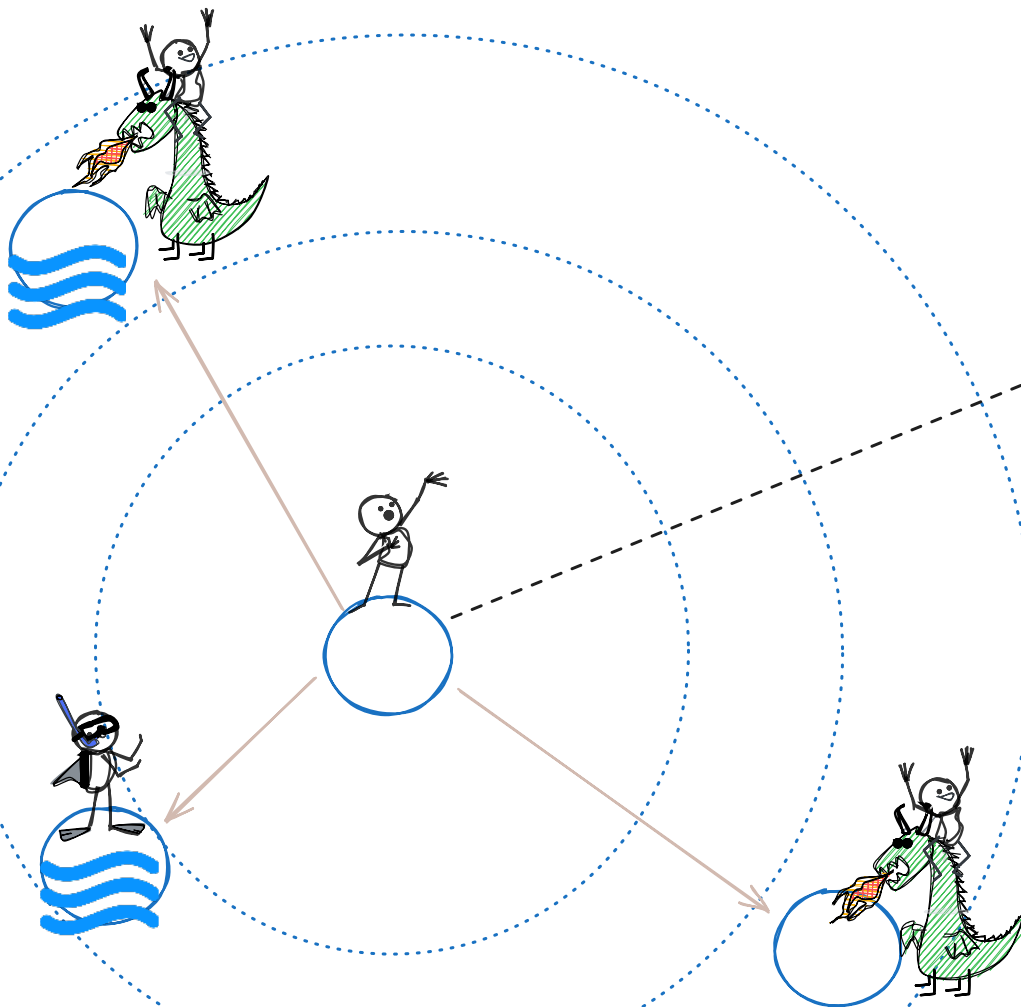
$$\Diamond A := \sim (A \rightarrow 0)$$

$$\Box A := \sim A \rightarrow 0$$



WikiMedia, Pubblico dominio

Mondi a distanza



«S'i' fosse foco, arderei 'l mondo...»

Implicazione modale



Inferenza monotona

$$A \rightarrow B \quad \text{e} \quad A \& C \rightarrow B$$

... allora è un fermione? $\models \neg \Diamond(\text{Spin_semint} \& \sim \text{Fermi})$
 ... e non ha massa, allora è un fermione? $\models \neg \Diamond(\text{Spin_semint} \& \text{No_mas} \& \sim \text{Fermi})$

$$A \rightarrow B \quad \text{e} \quad \neg A \& C \rightarrow B$$

Inferenza non-monotona!



© P. Audiffren



© MIT Boston

I poeti

«S' fosse foco, arderei 'l mondo;
 s' fosse vento, lo tempesterei;
 s' fosse acqua, i' l'anegherei;
 s' fosse Dio, manderei l' en profondo»



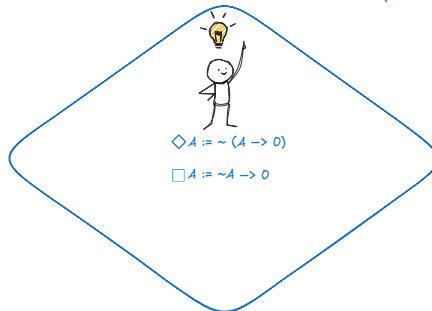
Fabrizio Da Andò, Se fossi foco, 1968
 (da un sonetto di Cecco Angiolini, 1260-1312)

«Se fossi più gatto,
 se fossi un po' più vagabondo,
 vedrei in questo sole,
 vedrei dentro l'alba e nel mondo...»



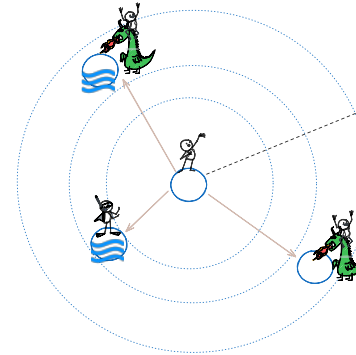
Francesco Guccini, Via Paolo Fabbri 43, 1976

Implicazione controfattuale



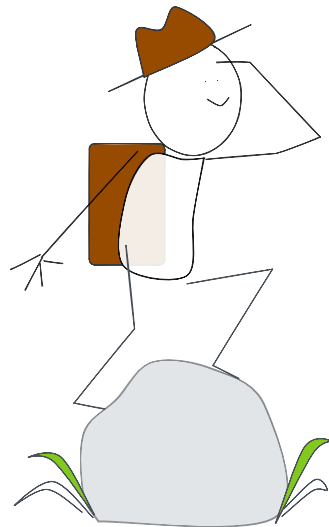
© P. Audiffren

Mondi a distanza



«S' fosse foco, arderei 'l mondo...»

Condizionali & Controfattuali



Logiche non-monotone e della revisione



I poeti

«direi: 1 mondo;
fornirei forse;
l'immagine;
direi? in profondità»

«de Fossa più gutta,
se fossi un più più profondo;
vedrei in questo solo,
vedrei dentro l'abisso e nel mondo...»

«Sì? Fossa Fossa, ardere: 1 mondo...»

Implicazione controfattuale

Mondi a distanza

Condizionali & Controfattuali

© 2017 Bocconi

La logica temporale

«Se nell'autunno del '36 Barcellona non fosse caduta,
da domani avremmo vissuto tempi migliori»



La logica temporale

«Se nell'autunno del '36 Barcellona non fosse caduta, da domani avremmo vissuto tempi migliori»

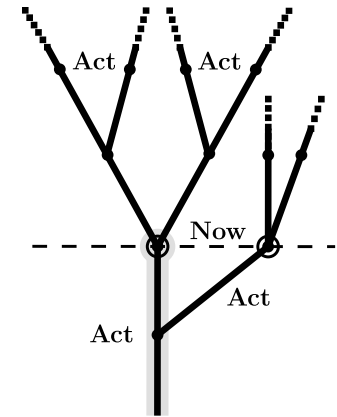


WikiMedia, Pubblico dominio

$$\sim E(P_{89})B \models A(X(A(G \vee)))$$

In qualche caso (pointing to $\sim E$)
 Anno scorso (pointing to P_{89})
 In ogni caso (pointing to B)
 Domani (pointing to X)
 Per sempre (pointing to G)
 (pointing to $\vee$)

Modelli ramificati del tempo



Stanford Encyclopedia of Philosophy, CC-BY-SA 4.0

© UTexas Austin



Riprese dal set di "Interstellar"
© Warner Bros 2014



Modelli ramificati del tempo

1	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	0	1
		0	1	1	0	1	0	
		0	0	0	0	0	0	
								???



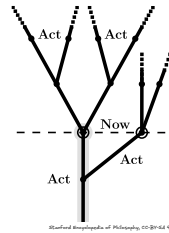
La logica temporale

«Se nell'autunno del '36 Barcellona non fosse caduta, da domani avremmo vissuto tempi migliori»



$\sim E(P_{89})B \models A(X(A(G,V)))$
 In ogni caso Domani
 Anno scorso Per sempre
 In qualche caso

Modelli ramificati del tempo



Logiche temporali

Tipi paradossali



Fotogramma da "Io e Annie", ©United Artists 1977

«Io non vorrei mai appartenere a nessun club che contasse tra i suoi membri uno come me.»

Paradosso di Russell

Immagine da "La bella e la bestia", ©Disney 1995



È un membro di



Immagini da Dominio Pubblico
WikiMedia

Paradosso di Russell

Non è un membro di

Immagine da "La bella e la bestia", ©Disney 1955



Immagini da Dominio Pubblico
WikiMedia

Paradosso di Russell

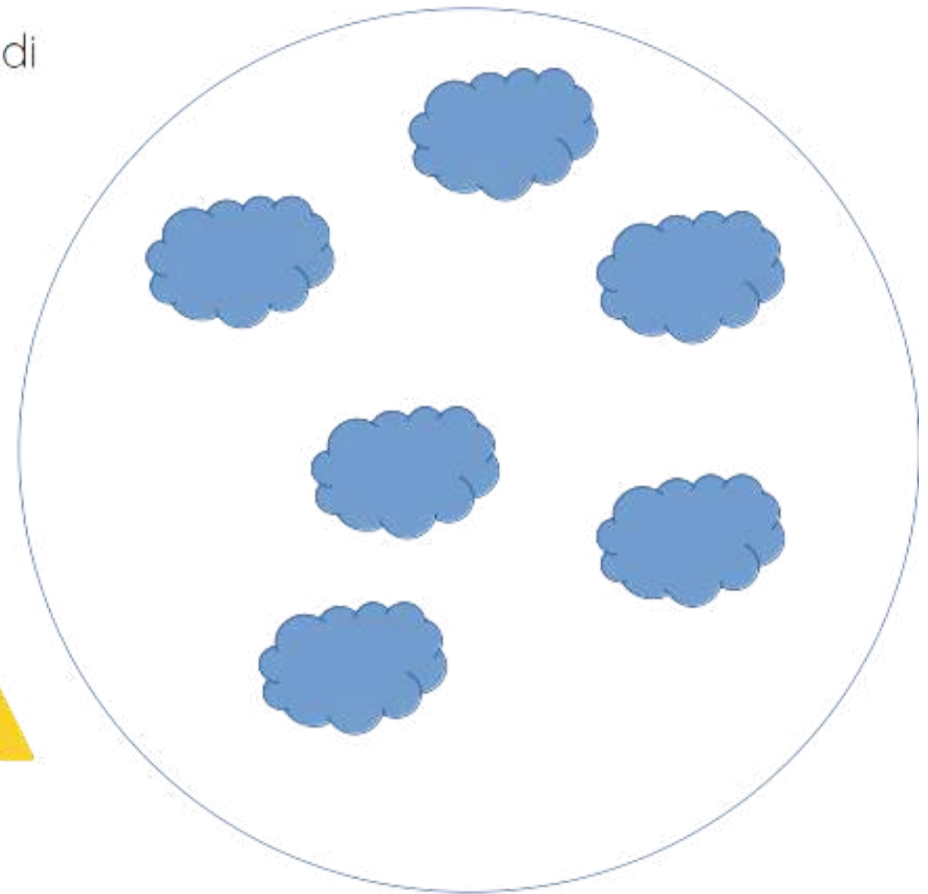
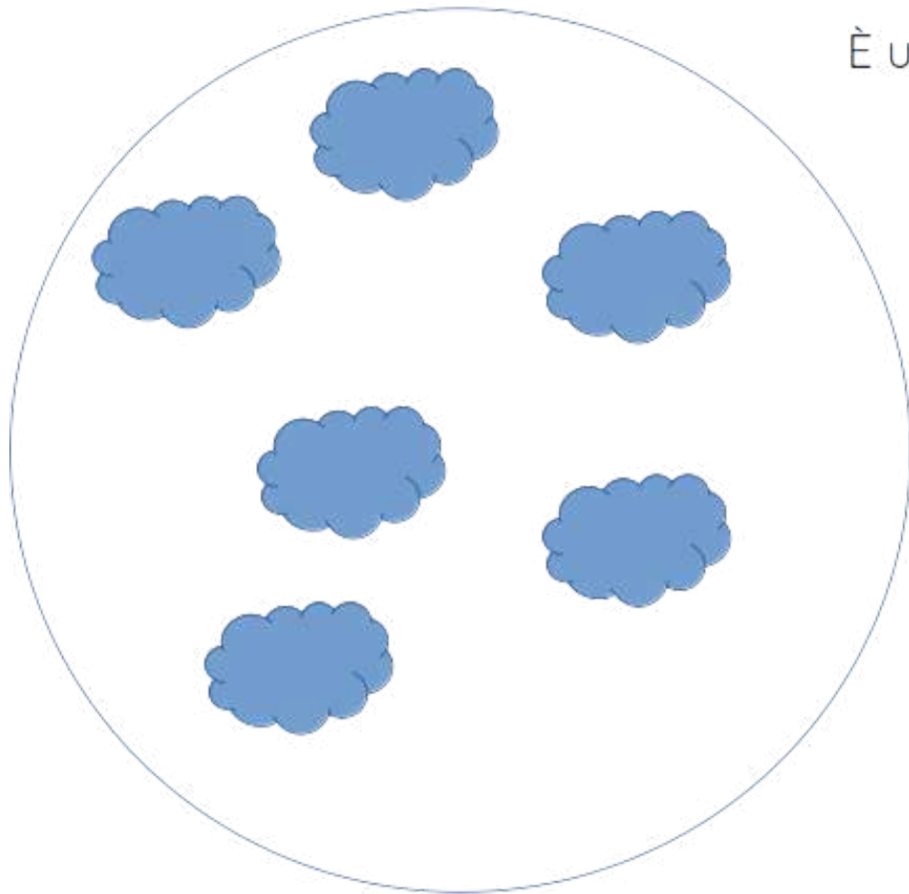
È un membro di



Immagini da Dominio Pubblico
WikiMedia

Paradosso di Russell

È un membro di



Ritratto di Bertrand Russell,
Pubblico Dominio Wikimedia

Paradosso di Russell



«L'insieme R di tutti gli insiemi che non sono membri di se stessi è membro di R , oppure non lo è ???»

Se R è membro di R , allora R non è membro di R .
Ma se R non è membro di R , allora R è membro di R !!



.....○ **Bivalenza:** Ogni enunciato o è vero, oppure è falso
(non ci sono altri valori!)

.....○ **Non-contraddizione:** Nessun enunciato è vero e falso

.....○ **Verofunzionalità:** La verità/falsità di ogni enunciato dipende

Logica di Kleene

Violando il principio di bivalenza, possiamo associare ad ogni enunciato A più valori di verità, ad esempio:

A può essere vero (1), falso (0), o indefinito (#)



Logica dei paradossi

Violando il principio non-contraddizione, possiamo dire che ogni enunciato A può essere:

vero (1), falso (0), o entrambi

R non è un membro di R



WikiMedia, Pubblico Dominio



WikiMedia, CC-BY-SA 2.0



WikiMedia, CC-BY-SA 3.0

Premesse $\models$ Conclusione

Non importa che le premesse siano vere o false!

Ma non è possibile che le premesse siano vere e la conclusione falsa!!

Solo che adesso

$A, \sim A \models B$

Logiche polivalenti, paraconsistenti, dialeteiche



Premesse $\models$ Conclusione

Non importa che le premesse siano vere o false!

Ma non è possibile che le premesse siano vere e la conclusione falsa!!

Solo che adesso

$A, \neg A \models B$

Logica dei paradossi

Violando il principio non-contraddizione, possiamo dire che ogni enunciato A può essere:

vero (1), falso (0), o entrambi

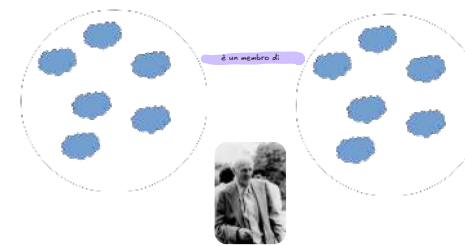
R non è un membro di R



Logica di Kleene

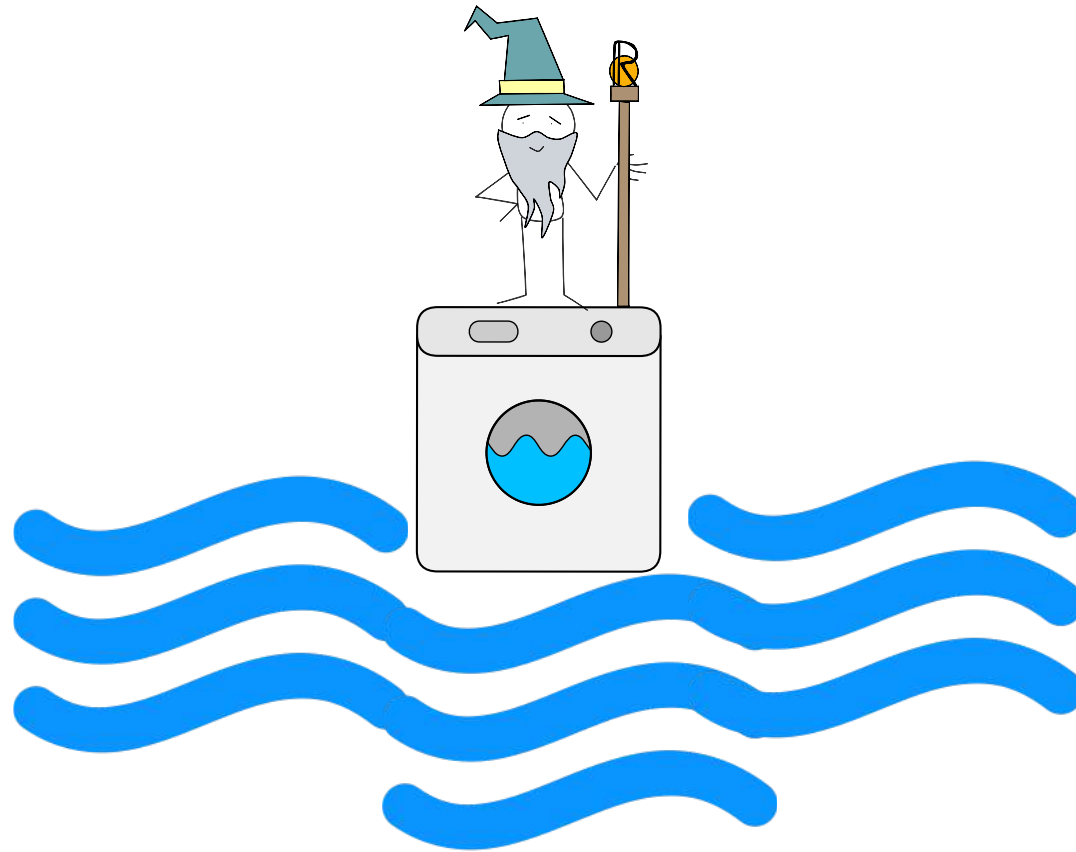
Violando il principio di bivalenza, possiamo associare ad ogni enunciato A più valori di verità, ad esempio:

A può essere vero (1), falso (0), o indefinito (#)





Logiche sfumate e a infiniti valori



La logica



Che cos'è la logica?



- Matematica
- Filosofia
- Informatica
- Linguistica
- Psicologia
- ...

Che cos'è la logica?



La logica studia quei
argomenti che sono
fondamentali per la
filosofia e la matematica.

Una definizione (ad un esempio)



Inferenze (il)logiche

1. Se mangio qualcosa, allora l'ho visto.
2. Mangio la focaccia.
Quindi: Ho visto la focaccia.

1. Se mangio qualcosa, allora l'ho visto.
2. Ho visto la focaccia.
Quindi: Mangio la focaccia.

Inferenze logiche
Modus ponens

1. Se mangio qualcosa, allora l'ho visto.
2. Mangio la focaccia.
Quindi: Ho visto la focaccia.

1. Se ho visto qualcosa, allora la mangio.
2. Ho visto la focaccia.
Quindi: Mangio la focaccia.

1. Se qualcosa è un ferretone, allora ha spin scintillanti.
2. Un quark è un ferretone.
Quindi: Un quark ha spin scintillanti.

Uno splendido Modus Ponens

È più la gente sa - e la gente lo sa - che qui suonare,
Suonare ti tocca per tutta la vita, e ti piace lasciarti ascoltare.

Logiche polivalenti, paraconsistenti, dialeteiche



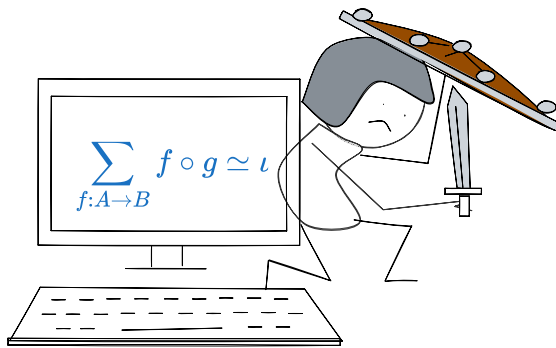


«L'insieme R di tutti gli insiemi che non sono membri di se stessi
è membro di R , oppure non lo è ???»

Se R è membro di R , allora R non è membro di R .
Ma se R non è membro di R , allora R è membro di R !



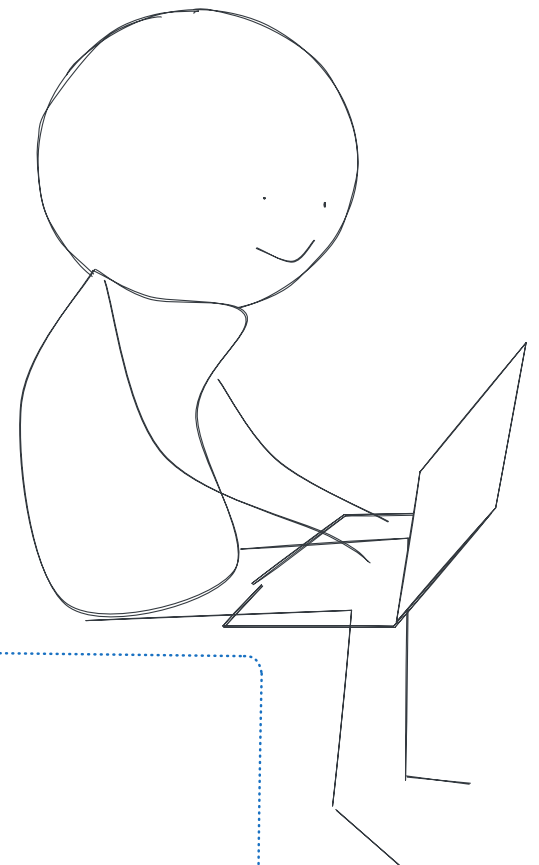
Logica intuizionista



$$\models A \circ \sim A$$



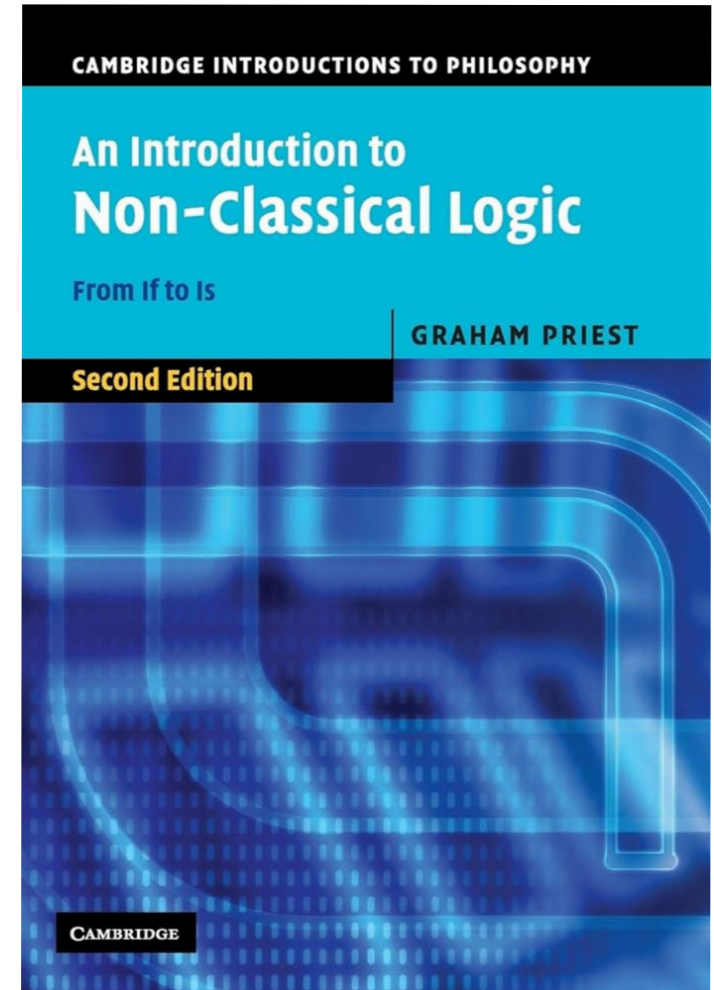
Per approfondire



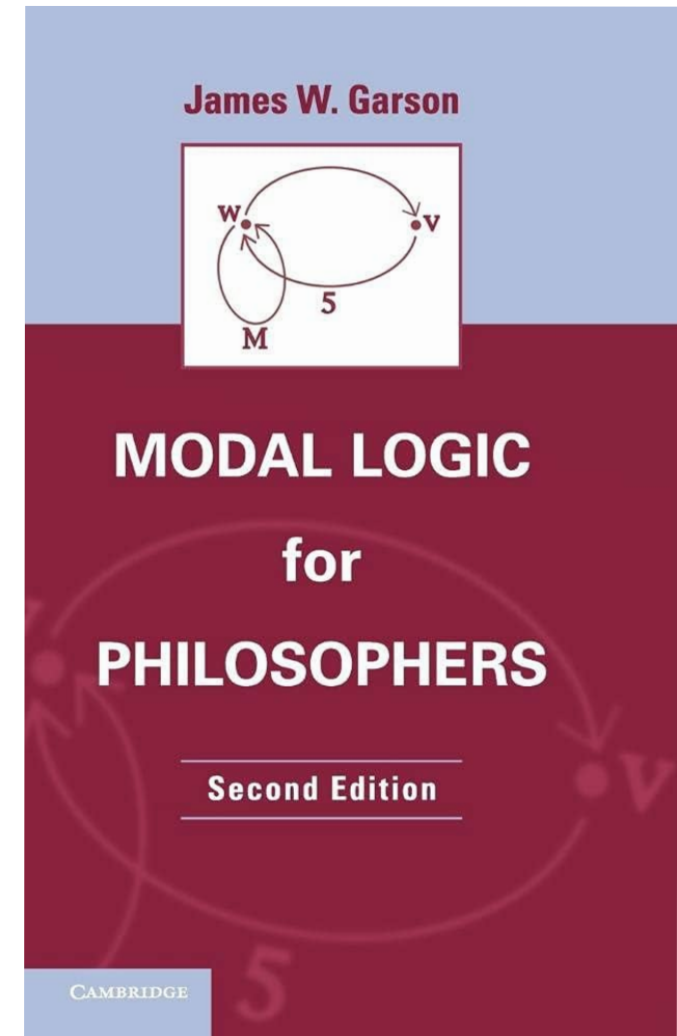
Idee

Idee

Graham Priest,
An Introduction to Non-Classical Logic
(2nd edition), CUP 2008



James W. Garson,
Modal Logic for Philosophers
(2nd edition), CUP 2013



Valentin Goranko & Antje Rumberg, Temporal Logic The Stanford Encyclopedia of Philosophy Summer 2025 Edition

The screenshot shows the Stanford Encyclopedia of Philosophy (SEP) entry for "Temporal Logic". The page has a red header with the SEP logo and navigation links: "Browse", "About", and "Support SEP". A search bar is located on the right. On the left side, there is a sidebar with links: "Entry Contents", "Bibliography", "Academic Tools", "Friends PDF Preview", "Author and Citation Info", and "Back to Top". The main content area is titled "Temporal Logic" and includes a sub-header "First published Mon Nov 29, 1999; substantive revision Fri May 3, 2024". The text describes the scope of temporal logic, from its origins in the 1950s to its use in artificial intelligence and computer science. It then provides a detailed table of contents for the entry, listing 8 main sections and their sub-sections.

Temporal Logic
First published Mon Nov 29, 1999; substantive revision Fri May 3, 2024

Broadly construed, *Temporal Logic* covers all formal approaches to representing and reasoning about time and temporal information. More narrowly, it usually refers to the modal-logic style approach introduced by Arthur Prior in the 1950s under the name *Tense Logic* and subsequently developed further by many logicians and computer scientists. Temporal Logic has been widely used as a formalism for clarifying philosophical issues about time, as a framework for defining the semantics of temporal expressions in natural language, as a language for encoding temporal knowledge in artificial intelligence, and as a tool for specification and verification of computer programs and systems.

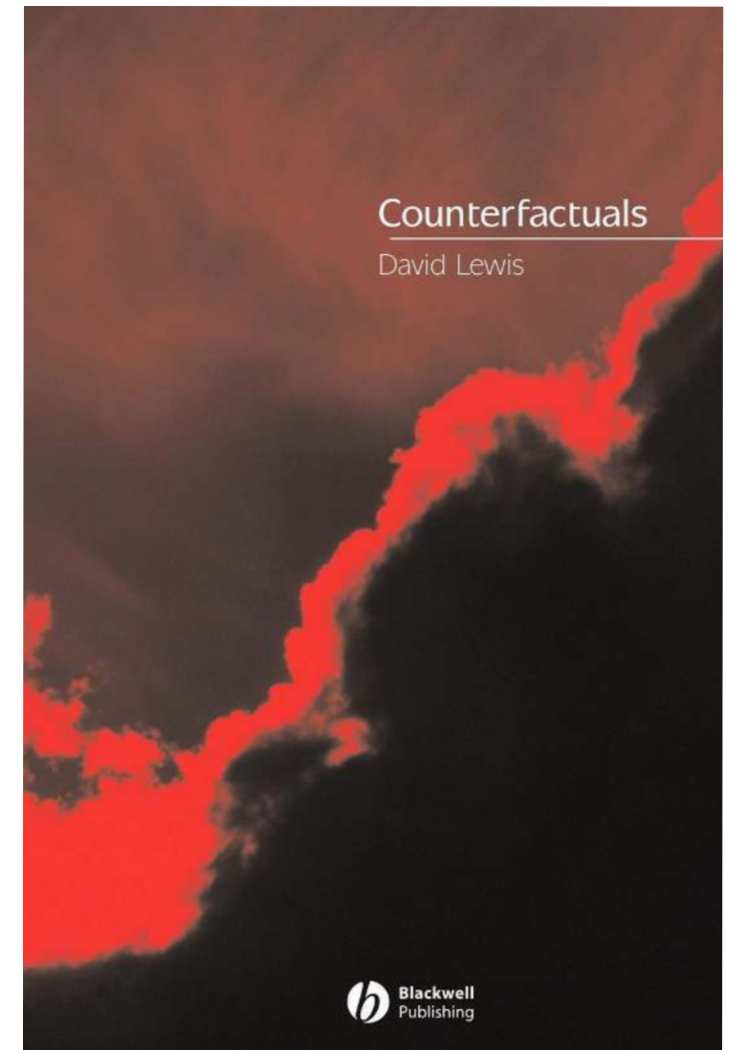
Here we provide a broadly representative — yet concise and inevitably incomplete — overview of the rich variety of temporal models and logics introduced and studied over the past 70 years or so.

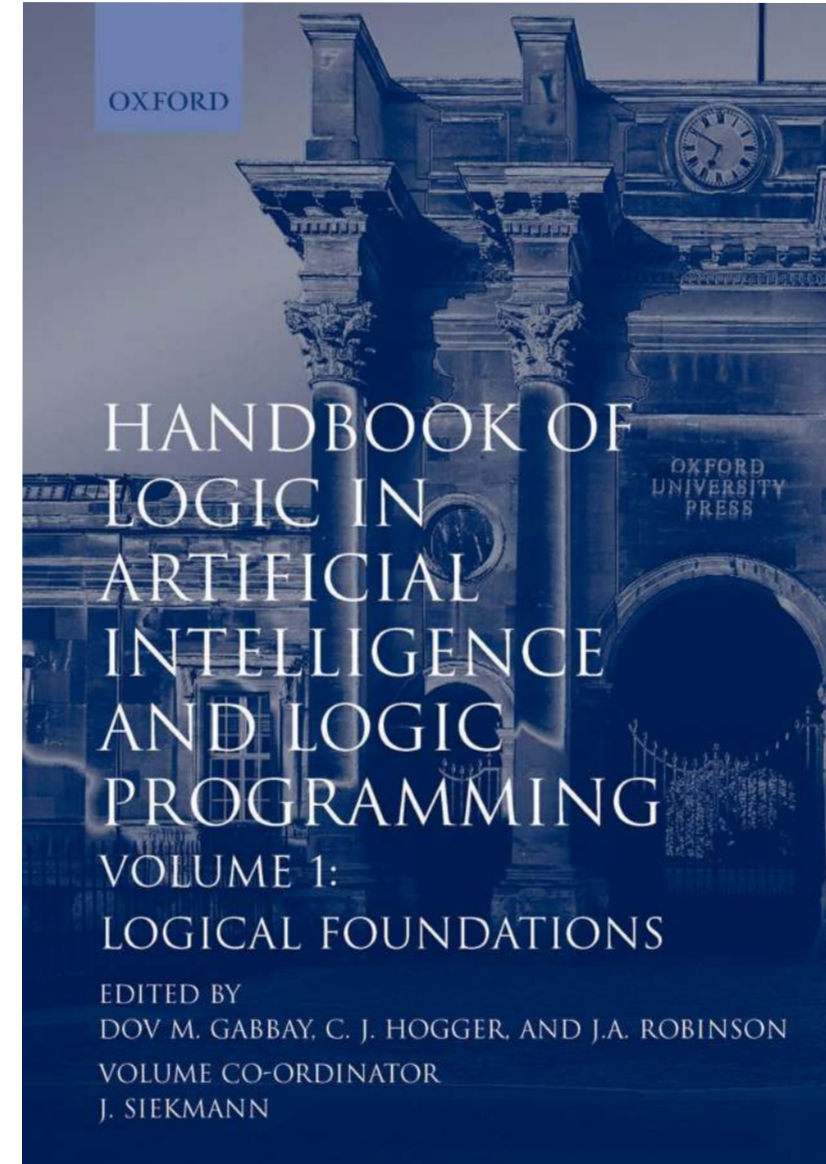
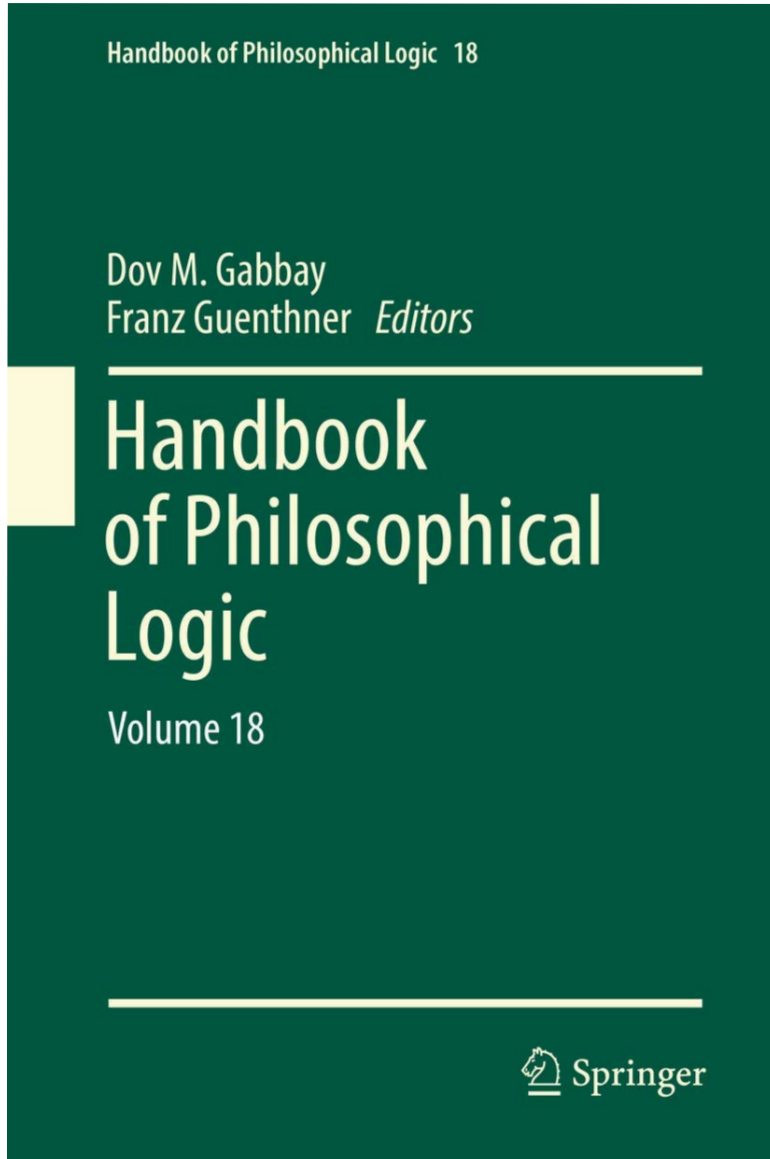
- 1. Temporal reasoning from antiquity to modern days
- 2. Formal models of time
 - 2.1 Instant-based models of time
 - 2.2 Interval-based models of time
 - 2.3 Instant-based vs. interval-based models of time
- 3. Prior's basic tense logic TL
 - 3.1 Prior's tense operators
 - 3.2 Semantics of TL
 - 3.3 Standard translation of TL into first-order logic
 - 3.4 Tense logic, first-order logic, and McTaggart's time series
 - 3.5 Axiomatic system K_T for TL
 - 3.6 Expressing temporal properties in TL and extensions of K_T
- 4. Extensions of TL over linear time
 - 4.1 Adding the *Next Time* operator
 - 4.2 Adding *Since* and *Until*
 - 4.3 The linear time temporal logic LTL
- 5. Branching time temporal logics
 - 5.1 Prior's theory of branching time
 - 5.2 The Peircean branching time temporal logic
 - 5.3 The Ockhamist branching time temporal logic
 - 5.4 The computation tree logics CTL and CTL*
- 6. Interval temporal logics
- 7. Other variants of propositional temporal logics
 - 7.1 Hybrid temporal logics
 - 7.2 Metric and real-time temporal logics
 - 7.3 Quantified propositional temporal logics
- 8. First-order temporal logics
 - 8.1 Existence and quantification in time

go to top 12/15/10

Idee

David Lewis
Counterfactuals
Blackwell Publishing 1973





Grazie per la vostra attenzione!



**COSIMO
PERINI BROGI**

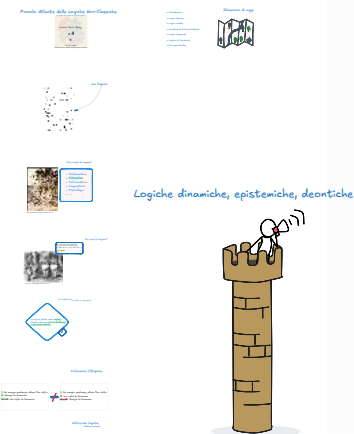
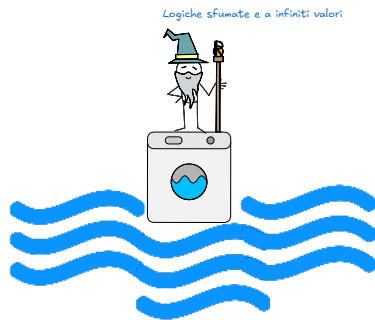
Assistant Professor
Research Unit SysMA
Systems Security, Modelling and Analysis

Piazza S. Francesco, 19 - 55100 Lucca (Italy)

cosimo.perinibrogi@imtlucca.it | www.logicosimo.gitlab.io



Rielaborazione da "Alice nel Paese delle Meraviglie", ©Disney 1951



Grazie per la vostra attenzione!



**COSIMO
PERINI BROGI**

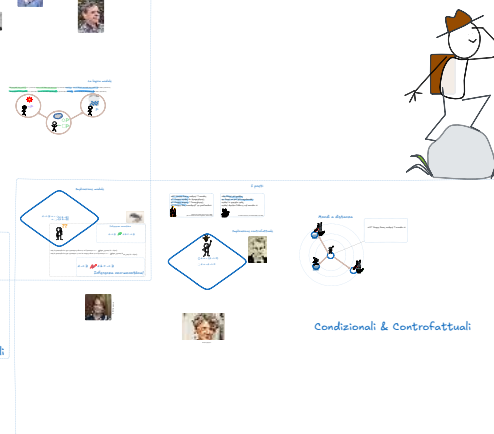
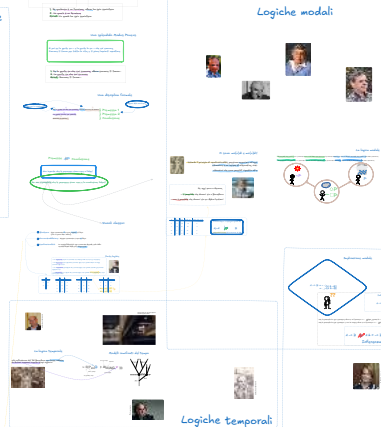
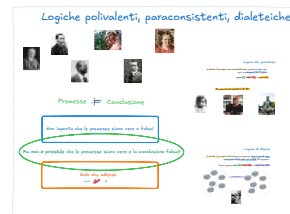
Assistant Professor
Research Unit SysMA
Systems Security, Modelling and Analysis

Piazza S. Francesco, 19 - 55100 Lucca (Italy)

cosimo.perinibroggi@imtlucca.it | www.logicosimo.gitlab.io



Riduzione da "Alice nel Paese delle Meraviglie", ©Disney 1951



Logiche non-monotone e della revisione

